• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 55

Φροντιστήριο Εν δυνάμει
www.en-dynamei.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 14 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Απόδειξη , σχολικό βιβλίο, σελ. 134

Β) Απόδειξη , σχολικό βιβλίο, σελ. 135

Γ) **1.** ΛΑΘΟΣ **2.** ΛΑΘΟΣ **3.** ΛΑΘΟΣ **4.** ΣΩΣΤΟ **5.** ΣΩΣΤΟ **6.** ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Είναι $\mathrm{P}(x)=\left(\lambda^3-16\lambda\right)x^3+\left(\lambda^2+4\lambda\right)x^2+\left(\lambda^2-16\right)x+\lambda+4 \Leftrightarrow$

$$\mathrm{P}(x)=\lambda(\lambda-4)(\lambda+4)x^3+\lambda(\lambda+4)x^2+(\lambda-4)(\lambda+4)x+\lambda+4.$$

Έστω $\lambda(\lambda-4)(\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=4 \text{ ή } \lambda=-4$.

- Αν $\lambda\neq 0 \textit{ και } \lambda\neq 4 \textit{ και } \lambda\neq -4$, τότε το $\mathrm{P}(x)$ είναι 3ου βαθμού.
- Αν $\lambda=0$, τότε $\mathrm{P}(x)=-16x+4$, οπότε το $\mathrm{P}(x)$ είναι 1ου βαθμού.
- Αν $\lambda=4$, τότε $\mathrm{P}(x)=32x^2+8$, οπότε το $\mathrm{P}(x)$ είναι 2ου βαθμού.
- Αν $\lambda=-4$, τότε $\mathrm{P}(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται βαθμός για το $\mathrm{P}(x)$.

Β)

i) Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases}\mathrm{P}(-1)=0\\ \mathrm{Q}(-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\alpha+\beta)\cdot(-1)^2-(\beta-1)\cdot(-1)+\beta=0\\ (\beta-1)\cdot(-1)^3+(\beta-2\alpha)\cdot(-1)^2-\alpha\cdot(-1)-\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\beta-1+\beta=0\\ -\beta+1+\beta-2\alpha+\alpha-\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+3\beta=1\\ \alpha+\beta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-3\beta\\ 1-3\beta+\beta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-3\beta\\ -2\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\end{cases}$$

ii) Είναι $\mathrm{P}(x)=x^2+x$.

Άρα: $\mathrm{A}(x)=\mathrm{P}(2x)-\mathrm{P}(x-1)-3x^2+3=(2x)^2+2x-(x-1)^2-(x-1)-3x^2+3=$

$=4x^2+2x-x^2+2x-1-x+1-3x^2+3 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{A}(x)=3x+3}$, οπότε είναι 1ου βαθμού.

iii) Είναι $Q(x)=-x^3-2x^2-x$ και $\mathrm{P}(3)=3^2+3=12$, οπότε θα έχουμε ότι:
$(x+3)\mathrm{B}(x)=-x^3-2x^2-x-12\ (1)$.

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει το πολυώνυμο $\mathrm{B}(x)$ να είναι 2ου βαθμού.
Έστω $\mathrm{B}(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu,\ \kappa\neq 0$,
Από (1) $\Leftrightarrow (x+3)(\kappa x^2+\lambda x+\mu)=-x^3-2x^2-x-12 \Leftrightarrow$
$\kappa x^3+\lambda x^2+\mu x+3\kappa x^2+3\lambda x+3\mu=-x^3-2x^2-x-12 \Leftrightarrow$
$\kappa x^3+(\lambda+3\kappa)x^2+(\mu+3\lambda)x+3\mu=-x^3-2x^2-x-12 \Leftrightarrow$
$\boxed{\kappa=-1}$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda+3\kappa=-2$ $\kappa\alpha\iota$ $\mu+3\lambda=-1$ $\kappa\alpha\iota$ $3\mu=-12$
$\lambda-3=-2$ $\quad$ $\boxed{\mu=-4}$
$\boxed{\lambda=1}$ $\quad$ $-4+3=-1$
Οπότε $\boxed{\mathrm{B}(x)=-x^2+x-4}$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

A)

i) $-2\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow -2\left(1-\eta\mu^2x\right)+\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow -2+2\eta\mu^2x+\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1=0$. Θέτουμε $\eta\mu x=\omega,\ -1\leq\omega\leq 1$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$2\omega^2+\omega-1=0,\ \Delta=1+8=9,\ \text{άρα}\ \omega_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=\dfrac{1}{2}\\ \omega_2=-1\end{cases}$$

- Αν $\omega=\frac{1}{2}$, τότε $\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}}$ ή $\boxed{x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$
- Αν $\omega=-1$, τότε $\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x\ (2)$.
Αν $\sigma\upsilon\nu x=0$, τότε από (2) $\Leftrightarrow \eta\mu x=0$, ΑΤΟΠΟ, διότι $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$, άρα $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$,
οπότε από (2) $\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3}}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

iii) Πρέπει: $\frac{7\pi}{10}-2x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow -2x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{10}\Rightarrow -2x\neq\kappa\pi-\frac{\pi}{5}\Rightarrow x\neq\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{10},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Πρέπει: $\frac{3\pi}{5}+x\neq\kappa\pi\Rightarrow x\neq\kappa\pi-\frac{3\pi}{5},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Έχουμε $\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{10}-2x\right)+\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{10}-2x\right)=-\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{10}-2x\right)=\sigma\varphi\left(-\frac{3\pi}{5}-x\right)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{10}-2x\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{5}+x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{10}-2x\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{10}+x\right)\Leftrightarrow\frac{7\pi}{10}-2x=\kappa\pi+\frac{11\pi}{10}+x\Leftrightarrow -3x=\kappa\pi-\frac{4\pi}{10}\Leftrightarrow\boxed{x=\frac{\kappa\pi}{3}-\frac{2\pi}{15}}$.

B)

i) Πρέπει $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Πρέπει $x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Άρα $A_f=\mathbb{R}-\left\{x/x=\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$

ii) Έχουμε: $f(x)=\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)\left(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\right)^2=\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)^2=$.

$=\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)\left(\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}\right)^2=\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}\right)^2=$

$=\left(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x\right)\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}=\frac{\eta\mu^4x}{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^4x}{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}=$

$=\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x}=\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x$.

iii) Έχουμε: $f(x)=2\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x=2\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2x+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2x}=2\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^4x+1=2\varepsilon\varphi^2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^4x-2\varepsilon\varphi^2x+1=\Leftrightarrow\left(\varepsilon\varphi^2x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2x-1=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\pm1$.

- $\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

  Πρέπει $0\leq\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\leq 2\pi\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}\leq\kappa\pi\leq\frac{7\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leq\kappa\leq\frac{7}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0\ \acute{\eta}\ \kappa=1$

  Για $\kappa=0$ προκύπτει $\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

  Για $\kappa=0$ προκύπτει $x=\pi+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\boxed{x=\frac{5\pi}{4}}$

- $\varepsilon\varphi x=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

  Πρέπει $0\le \kappa\pi-\frac{\pi}{4}\le 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\le\kappa\pi\le\frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{9}{4} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa=1$ ή $\kappa=2$

  Για $\kappa=1$ προκύπτει $x=\pi-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{4}}$

  Για $\kappa=2$ προκύπτει $x=2\pi-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{7\pi}{4}}$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Α)

i) Δίνεται: $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-2\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}-\varepsilon\varphi\frac{34\pi}{3}=-2\sqrt{3}$ (1).

Είναι: $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi-\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Είναι: $\varepsilon\varphi\frac{34\pi}{3}=\varepsilon\varphi\frac{30\pi+4\pi}{3}=\varepsilon\varphi\left(10\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}=\varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Άρα από (1) $\Leftrightarrow \alpha\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}=-2\sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$

ii) Έχουμε: $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x-\sqrt{3},\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Άρα η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με τον x΄x, της μορφής $\boxed{\left(\kappa\pi\pm\frac{\pi}{12},0\right),\ \kappa\in\mathbb{Z}}$.

iii) Η μέγιστη τιμή της f είναι $2-\sqrt{3}$.

Είναι $f(x)=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x-\sqrt{3}=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x=2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi \Leftrightarrow \boxed{x=\kappa\pi},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

iv) Είναι: $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sigma\upsilon\nu 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}=2\sigma\upsilon\nu(\pi-2x)-\sqrt{3}=-2\sigma\upsilon\nu 2x-\sqrt{3}$

Έχουμε την εξίσωση: $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-f(x)=2 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu 2x-\sqrt{3}-2\sigma\upsilon\nu 2x+\sqrt{3}=2 \Leftrightarrow$

• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 55

$$\Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x = 2 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu 2x = 2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

B) Έχουμε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x - \pi}{4}\right) - x^4 + 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x - \pi}{4}\right) = x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x - \pi}{4}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 + 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x - \pi}{4}\right) = \left(x^2 - 1\right)^2 + 1 \; (1)$$

Αφού $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x - \pi}{4}\right) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε από (1) προκύπτει ότι:

$$\left(x^2 - 1\right)^2 + 1 \leq 1 \Rightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 \leq 0 \Rightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

- Για $x = 1$, η (1) $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi - \pi}{4}\right) = \left(1^2 - 1\right)^2 + 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, ισχύει.
- Για $x = 1$, η (1) $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{-\pi - \pi}{4}\right) = \left((-1)^2 - 1\right)^2 + 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$, δεν ισχύει.

Άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\boxed{x = 1}$.